**Université Ibn Khaldoun de Tiaret.**
**Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie.**
**Promotion: $1^{ière}$ année SNV.**
**Corrégé type de l'examen en math-stat, 2023 -2024.**

**Exercise 1**

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x) = \ln(\frac{x+1}{x-1})$.
**1**. La fonction $f$ est définie sur:
$D_f = \{x \in \mathbb{R} \backslash \ \frac{x+1}{x-1} > 0\} = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$. ...............................(01 point)

**2**. La fonction $f$ est: impaire ...............................(01 point)

Car $D_f$ est symtrique par rapport 0 et $f(-x) = \ln(\frac{-x+1}{-x-1}) = -\ln(\frac{x+1}{x-1}) = -f(x)$.
**3**. La fonction dérivée de $f$ est :
$f'(x) = \frac{-2}{x^2-1}$................................(01 point)

**4**. La fonction $f$ est : décroissante sur $D_f$ $(\frac{-2}{x^2-1} < 0$..................(01 point)

**Exercise 2** *On cosidère la fonction $f$ définie par:*

$$f(x) = \ln(2x-1) + 2x - 1$$

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \backslash \ (2x-1) > 0\} = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ .................................(01 point)
2) Les limites

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \ln(2x-1) + 2x - 1 = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(2x-1) + 2x - 1 = +\infty \end{array}\right\}$$ .........................................(01 point)

3) Les branches infinies
a). $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = -\infty \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$ est asymptote à lacourbe $(C_f)$........................(0.5 points)

b). $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}[\frac{f(x)}{x}] = 2, \lim_{x\to+\infty}[f(x) - 2x] = +\infty \Rightarrow (C_f)$ a une branche infinie dans la direction de la droite $y = 2x$ aux voisinage de $+\infty$ ............................(01 points)
4) pour tous $x$ dans $\mathbb{R}$ on a $f'(x) = \frac{2}{2x-1} + 2 = \frac{4x}{2x-1}$,...................(01 points)

le signe de $f' > 0$ sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$...........................................(0.5 points)
6) Le tableau de variations de $f$ .......................................(0.5 points)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | -$\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

7)
$$\left\{\begin{array}{c} a)\text{Lafonction } f \text{ estcontinue sur } \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[ \text{ par ce que c'est une somme de deux fonctions usuelles} \\ b)\text{La fonction } f \text{ est monotone sur } \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[ \text{ (croissante strictement)} \\ c)\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) \times f(1) < 0 \end{array}\right.$$

D'après théorème de valeurs intermédiaire l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$ ............................(01.5 points)

7) l'aire compris entre l'axe $(xox^{'})$ et la courbe $(C_f)$ et les deux droites $x = 1, x = 2$

Comme $f(x) > 0$ Sur $[1; 2]$ alors :
$S = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (\ln(2x-1)+2x-1)dx = xln(2x-1)-x-\frac{1}{2}ln(2x-1)+x^2-x]_1^2$
$S = \frac{3}{2}ln(3) + 1$............................(02 points)
8) La courbe $(C_f)$............................(01.5 points)

**Exercise 3**

$$\int_1^e x^3 lnx dx = \frac{1}{4}x^4 ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{1}{4}x^4 \frac{1}{x}dx = \frac{1}{4}x^4 ln(x) - \frac{1}{16}x^4]_1^e = \frac{3}{16}e^4 + \frac{1}{16}$$

............................(02 *points*)

$$\int_1^e (x-1)sin(x)dx = -(x-1)cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_1^e cos(x)dx = -(x-1)cos(x)+sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

............................(02 *points*)

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$$

............................(02 *points*)